# Multivariate Analysemethoden

Vorlesung

Entscheiden mit dem Likelihood-Ratio

*Günter Meinhardt*
*Johannes Gutenberg Universität Mainz*

## Entscheiden über Alternativen (Hypothesen)

**Allgemeines**

- Entscheidungen sind orientiert an Kriterien („Objectives“):
  - Maximierung des Erwartungswerts
  - Maximierung des Anteils korrekter Entscheidungen
  - Maximierung einer Gewichtung von Fehlern 1. und 2. Art
- Es ist günstig, maximale Information in die Entscheidung fliessen zu lassen (Aposteriori Wahrscheinlichkeit bestimmen unter Kenntnis bzw. Schätzung der A-Priori Wahrscheinlichkeiten der Alternativen)
- Man benutzt Entscheidungsfunktionen, die alle Informationen enthalten.

**Likelihood Ratio**

- Allgemeines und flexibles Konzept zur Entscheidung aufgrund von Likelihoods und insbesondere Likelihood-Funktionen.
- LR-Ratio ist eine Entscheidungsfunktion auf einer oder mehreren Entscheidungsvariablen, in die dieselbe Information einfliesst wie in eine Bayes Statistik.
- LR-Ratio Entscheidungen können für verschiedenste Kriterien optimiert werden.

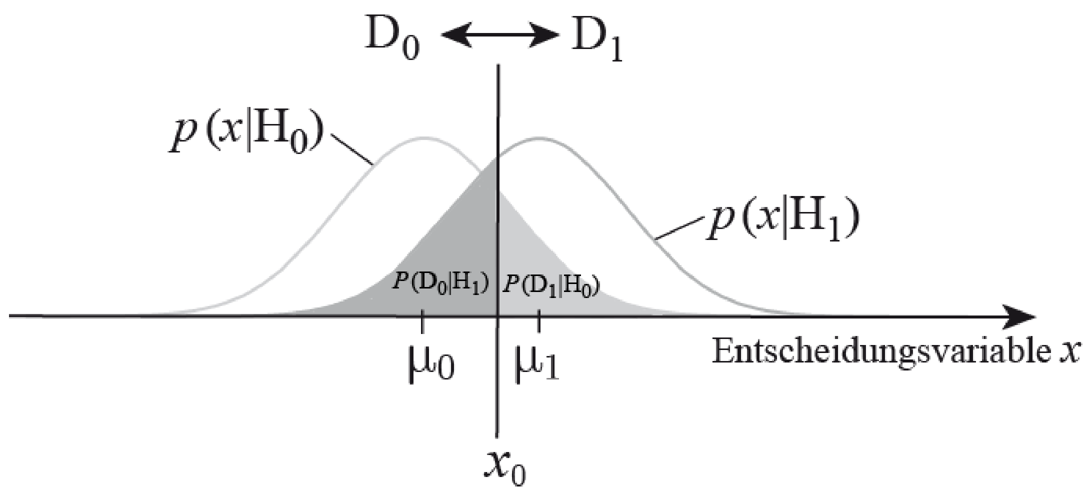
## 2 Alternativen

**Es gilt**

| Entscheidung (D) für | $H_1$ | $H_0$ |
|---|---|---|
| $D_1$ | $P(D_1 \mid H_1)$ **Hit** | $P(D_1 \mid H_0)$ **False Alarm** |
| $D_0$ | $P(D_0 \mid H_1)$ **Miss** | $P(D_0 \mid H_0)$ **Corr. Reject.** |
| | $\Sigma = 1$ | $\Sigma = 1$ |

In einer 2 x 2 Konfusionsmatrix sind die empirisch schätzbaren Wahrscheinlichkeiten als Ergebnis der Anwendung einer Entscheidungs-Strategie festgehalten. Die Verteilung dieser Wahrscheinlichkeiten kann bei Kenntnis der Likelihoodfunktionen nach Kriterien optimiert werden.

## 2 Alternativen




Die Likelihoodfunktionen p(x) sind Wahrscheinlichkeitsdichten.
Es folgt:

**Miss**

$$P(D_0|H_1) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x|H_1)\,dx = F_1(x_0)$$

**Hit**

$$P(D_1|H_1) = 1 - P(D_0|H_1)$$

**CR**

$$P(D_0|H_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x|H_0)\,dx = F_0(x_0)$$

**FA**

$$P(D_1|H_0) = 1 - P(D_0|H_0)$$

**Bayes-Ansatz**

$$P(H_i|x) = \frac{P(x \cap H_i)}{P(x)} = \frac{p(x|H_i)P(H_i)}{P(x)}$$

Für 2 Alternativen $i,k$:

**Regel: Max Aposteriori**

$$q_{ik}(x) = \frac{p(x|H_i)P(H_i)}{p(x|H_k)P(H_k)} > 1$$

„Wenn $q_{ik} > 1$ wähle $i$, sonst $k$“

Dies entspricht:

**Likelihood Ratio Regel**

$$lr_{ik}(x) = \frac{p(x|H_i)}{p(x|H_k)} > \frac{P(H_k)}{P(H_i)} \quad \text{wähle } i\text{, sonst } k$$

(LR- Entscheidung äquivalent zur Entscheidung mit Bayes-Regel)

**Allgemeine Likelihood Ratio-Regel**

$$lr_{ik}(x) = \frac{p(x|H_i)}{p(x|H_k)} > \beta \qquad \text{wähle } i\text{, sonst } k$$

Man kann nun β nach verschiedenen Kriterien herleiten.
Die Likelihood-Ratio Regel ist dann immer optimal im Sinne des Kriteriums.

---

**Maximiere Percent Correct**

$$\beta = \frac{P(H_k)}{P(H_i)}$$

(Bayes-Regel maximiert percent correct)

---

**Maximiere Expected Value**

$$\beta = \frac{(V_{00} - V_{10})P(H_0)}{(V_{11} - V_{01})P(H_1)}$$

$V_{00}$… $V_{11}$: Werte der Entscheidung
(1. Index: Entscheidung für
2. Index: gültige Hypothese)

[Übungen & Beispiele]

## *p* –Variablen multivariat normalverteilt

Sei

$$f\left(\mathbf{x}\middle|c_j\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{p/2}\left|\boldsymbol{\Sigma}_j\right|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}\Delta_j^2}$$

die Likelihoodfunktion für Gruppe *j* mit

$$\Delta_j^2=\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_j\right)^t\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_j\right)$$

der quadrierten Mahalanobisdistanz zum Gruppenzentroid $\boldsymbol{\mu}_j$

---

## LR-Regel

„Für 2 Gruppen $c_i$, $c_k$, klassifiziere in Gruppe $c_i$ wenn

$$lr_{ik}\left(\mathbf{x}\right)=\frac{f\left(\mathbf{x}\middle|c_i\right)}{f\left(\mathbf{x}\middle|c_k\right)}>\frac{P_k}{P_i}$$

sonst in Gruppe $c_k$

Hierzu korrespondiert durch Bekanntheit der Likelihood-Funktionen eine einfache Regel (QCR).

## *QCR-Regel*
## (multivariat)

Gegeben seien Gruppen $c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots c_g$

Definiere die **Q**uadratic **C**lassification **R**ule:

$$QCR_j = \ln\left|\Sigma_j\right| + \Delta_j^2 - 2\ln\left(P_j\right)$$

Klassifiziere in Gruppe $c_{j'}$ wenn gilt

$$QCR_{j'} = \min_j\left(QCR_j\right)$$

---

## univariat

Dieselbe Regel gilt für p=1 mit

$$QCR_j = \ln\left|\sigma_j\right| + z_j^2$$

---

[Übungen & Beispiele]