Kurzübersicht Lineare Algebra

Vorlesung Multivariate Analysemethoden WS 2006/2007
(G. Meinhardt)

21.11.2006

1 Lineare Gleichungen

System linearer Gleichungen, allgemeine Form:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Satz 1 *Sind alle b_j = 0, heißt das System homogen. Ist der Vektor u die allgemeine Lösung des homogenen Systems und w eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, dann ist $u + w$ die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.*

Lösen von Gleichungssystemen über 2 Schritte:

1. Bringe in Staffelform (Gauß'scher Algorithmus, triviale Gleichungen können gestrichen werden)

2. Setze ein.

Dabei können drei Fälle auftreten:

1. Es gibt so viele Gleichungen wie Unbekannte (System ist vollständig gestaffelt) $\Longrightarrow$ Das System hat eine *eindeutige* Lösung.

2. Es resultieren weniger Gleichungen als Unbekannte: r Zeilen, n Spalten $\Longrightarrow$ Es gibt $n - r$ freie Variablen. Eine beliebige partikuläre Lösung erhält man dann durch willkürliches Zuweisen von Werten auf die freien Variablen. Das System hat *beliebig viele* Lösungen.

3. Es taucht eine Gleichung der Form $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_j$ auf $\Longrightarrow$ Das System ist inkonsistent und hat *keine* Lösung.

2 Matrizen

2.1 Regeln

Matrizen werden addiert und mit einem Skalar multipliziert, indem man die Operation auf die korrespondierenden Elemente anwendet. Interessanter ist die Multiplikation von Matrizen:("Zeile mal Spalte" - Regel)

Definition 1 *Sei **A** eine $m \times p$ Matrix und **B** eine $p \times n$ Matrix. Dann erhält man eine $m \times n$ Matrix, deren $ij-$ tes Element jeweils durch die Multiplikation der i - ten Zeile von **A** mit der j - ten Spalte von **B** gegeben ist.*

Die Matrix **A** muß also so viele Spalten haben, wie **B** Zeilen hat. Die Zielmatrix hat dann so viele Zeilen wie **A** und so viele Spalten wie **B**. Die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor ergibt einen Spaltenvektor.

2.2 Gesetze

1. $Kommutativgesetz$:
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$
d.h. die Matrixmultiplikation ist *nicht* kommutativ.

2. *Assoziativgesetz:*
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

3. *Distributivgesetz:*
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \qquad \text{(linksdistributiv)}$$
$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} \qquad \text{(rechtsdistributiv)}$$

Bei Multiplikation mit einem Skalar bleiben die o.g. Gesetze unberührt.

2.3 Transponierte

Die Transponierte einer Matrix $\mathbf{A}$ ist definiert als diejenige Matrix $\mathbf{A}^t$, die man erhält, wenn man die Zeilen von A als Spalten schreibt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.4 Inverse

Die Inverse einer Matrix spielt eine ausgezeichnete Rolle bei der Lösung von Gleichungssystemen

Definition 2 *Existiert zu einer Matrix* $\mathbf{A}$ *eine Matrix* $\mathbf{A}^{-1}$ *mit der Eigenschaft*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}\,,$$

so heißt $\mathbf{A}^{-1}$ *die Inverse zu* $\mathbf{A}$,*wobei*

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

die Einheitsmatrix ist.

Die Inverse einer Matrix wird über die sog. *Determinante* einer Matrix (eine skalare Maßzahl) gefunden. Ein Beispiel möge dies veranschaulichen:

Beispiel:

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und es werde $\mathbf{A}^{-1}$ gesucht, so muß gelten

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Setzt man $\det \mathbf{A} = ad - bc$, so findet man als Lösung

$$\begin{array}{ll} x_{11} = \frac{d}{\det \mathbf{A}} & x_{12} = \frac{-b}{\det \mathbf{A}} \\ x_{21} = \frac{-c}{\det \mathbf{A}} & x_{22} = \frac{a}{\det \mathbf{A}} \end{array} ,$$

und da $\det \mathbf{A}$ jeweils im Nenner steht, folgt, daß eine Lösung nur dann existiert, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist.

Satz 2 *Man kann die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ zu einer Matrix $\mathbf{A}$ finden dann und nur dann, wenn die Determinante von $\mathbf{A}$ nicht Null ist ("singuläre Matrix": Matrix, die keine Inverse hat).*

2.5 Determinanten

Determinanten sind skalare Maßzahlen von Matrizen, die etwas über die Eigenschaften der Matrizen aussagen. Sie sind insbesondere wichtig bei

1. der Lösung von linearen Gleichungssystemen;
2. der Ermittlung der Eigenschaften von linearen Operatoren.

2.5.1 Permutationsregel zum Auffinden der Determinante

Sei σ_n eine Permutation der Länge n. Wir definieren folgende Regel:

Definition 3 *σ_n heißt gerade genau dann, wenn eine gerade Anzahl von Paaren (i, k) existiert, so daß gilt: $i > k$, aber i geht k in σ_n voraus, sonst heißt σ_n ungerade.*

Beispiel: Es sei $\sigma_6 = \{3, 8, 2, 1, 9, 4\}$, dann gibt es 7 Paare im Sinne der Definition, nämlich $(3, 2), (3, 1), (8, 2), (8, 1), (8, 4), (2, 1), (9, 4) \Longrightarrow \sigma_6$ ist ungerade.
Man definiere nun die Vorzeichenfunktion *Signum von σ* als

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sigma \text{ gerade} \\ -1, & \text{wenn } \sigma \text{ ungerade} \end{cases}$$

und betrachte die n - quadratische Matrix $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \underline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

hierin ist eine Auswahl von Elementen getroffen derart, daß nur je ein Element einer bestimmten Zeile i und nur je ein Element einer bestimmten Spalte j entnommen ist. Wir bilden das Produkt aller dieser Elemente:

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} ,$$

von denen aus der Matrix $\mathbf{A}$ insgesamt $n!$ gebildet werden können, dies sind die möglichen Folgen $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ aus den Spalten, da aus jeder Zeile 1,2,$\ldots$, n entnommen werden muß.[1] Nun kann die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ definiert werden:

[1] Man könnte natürlich auch umgekehrt die Spalten aufsteigend laufen lassen und aus den Zeilen variabel entnehmen.

Definition 4 *Die Determinante einer n - quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ ist eine skalare Maßzahl, die sich durch Aufsummieren aller Permutationen σ_n (von der Ordnung n) unter Beachtung der Vorzeichenregel für gerade und ungerade Permutationen ergibt:*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma} (sgn\, \sigma)\ a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}\ ,$$

Für $\det \mathbf{A}$ *schreibt man auch* $|\mathbf{A}|$.

Beispiel: Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\ ,$$

wobei $(1,2,3)\,,(2,3,1)\,,(3,1,2)$ gerade sind, $(3,2,1)\,,(2,1,3)\,,(1,3,2)$ sind ungerade.

2.5.2 Eigenschaften von Determinanten

Es folgen Sätze über die Determinante einer Matrix $\mathbf{A}$:

1. Die Determinanten von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^t$ sind gleich: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^t|$.
2. Für ein Matrixprodukt gilt: $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.
3. Für skalare Multiplikation gilt: $|k \cdot \mathbf{A}| = k \cdot |\mathbf{A}|$.
4. Besteht eine Zeile (Spalte) einer n - quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ aus Nullen, gilt $|\mathbf{A}| = 0$.
5. Ist eine n - quadratische Matrix $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix, so ist $|\mathbf{A}|$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Insbesondere ist $|\mathbf{I}| = 1$.

Sätze über den Zusammenhang von Determinanten und linearen Gleichungen folgen später.

2.6 Minoren und Kofaktoren

Aus einer n - quadratischen Matrix erhält man durch Weglassen einer beliebigen Zeile und einer beliebigen Spalte stets eine neue auf $n-1$ verkleinerte Matrix. Die Determinante dieser verkleinerten Matrix nennt man *Minor*. Da sich bei Weglassung der i - ten Zeile und der j - ten Spalte beide in dem Element a_{ij} kreuzen, kann man den Minor diesem Element zuordnen und schreibt $|\mathbf{M}_{ij}|$ für den Minor des Elementes a_{ij}. Man definiert nun den *Kofaktor* A_{ij} von a_{ij} als "mit Vorzeichen versehenem Minor":

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left|\mathbf{M}_{ij}\right| .$$

Durch diese Regel werden den Minoren der Matrix $\mathbf{A}$ Vorzeichen nach dem Muster eines Schachbrettes zugeordnet:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Man kann nun die Determinante einer Matrix mit Hilfe der Kofaktoren definieren (alternative Definition zur Permutationsregel, 'Laplace-Entwicklung'):

Definition 5 *Die Determinante der Matrix* $\mathbf{A}$ *ist gleich die Summe der Produkte, die man erhält, wenn man die Elemente irgendeiner Zeile (Spalte) mit den zugehörigen Kofaktoren multipliziert:*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

und

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} .$$

2.7 Klassische Adjunkte

Man kann zu jedem Element a_{ij} der Matrix $\mathbf{A}$ den zugehörigen Kofaktor bestimmen. Die quadratische Matrix der Ordnung n, die man erhält, wenn man alle Elemente a_{ij} durch die diesen Elementen zugeordneten Kofaktoren ersetzt und anschließend die Matrix transponiert, nennt man "Klassische Adjunkte" von $\mathbf{A}$:

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun der Satz:

Satz 3 *Für jede n - quadratische Matrix gilt:*

$$\mathbf{A} \times \textit{ adj } \mathbf{A} = \textit{adj } \mathbf{A} \times \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \times \mathbf{I}.$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} &= \mathbf{I} \\ \Rightarrow \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} &= \mathbf{A}^{-1}. \end{aligned}$$

D.h. man kann die Inverse von $\mathbf{A}$ bestimmen über die Bestimmung der Klassischen Adjunkten.

2.7.1 Anwendung auf die Lösung linearer Gleichungen

Mithilfe der so bestimmbaren Inversen können nun auf einfache Weise lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Es sei **A** eine n - quadratische Matrix und **X** und **B** seien Spaltenvektoren. Die Gleichung

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

kann gelöst werden über Vormultiplizieren mit der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} \times \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{I} \times \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

D.h. der Lösungsvektor **X** kann gefunden werden über die Inverse der Koeffizientenmatrix **A**. Eine weitere Methode, die auf der Voraussetzung beruht, daß es eine eindeutige Lösung gibt, ist die Benutzung der sog. *Cramer'schen Regel* für ein System mit n linearen Gleichungen und n Unbekannten. Dazu definiert man die Determinante $|\mathcal{A}_j|$ der Matrix, die man erhält, wenn man die $j-$ te Spalte von **A** durch den Vektor **B** ersetzt. Dann gilt

Satz 4 *Es sei* $|\mathbf{A}| \neq 0$. *Dann ist die eindeutige Lösung gegeben durch*

$$x_1 = \frac{|\mathcal{A}_1|}{|\mathbf{A}|},\ x_2 = \frac{|\mathcal{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, \ldots, x_n = \frac{|\mathcal{A}_n|}{|\mathbf{A}|}\,. \qquad \text{(Cramer'sche Regel)}$$

Für den Fall eines homogenen Systems gilt der Satz

Satz 5 *Das homogene System* $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{0}$ *hat eine von Null verschiedene Lösung dann und nur dann, wenn* $|\mathbf{A}| = 0$ *gilt.*

3 Basis und Dimension

3.1 Lineare Abhängigkeit

Definition 6 *Die Vektoren* $a_{1,}a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ *heißen linear abhängig, wenn es Skalare* $x_{1,}x_2, \ldots, x_n$ *gibt, die nicht alle gleich Null sind, so daß gilt*

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0\,,$$

andernfalls heißen die Vektoren linear unabhängig.

Ist also *mindestens ein* Skalar $x_1 \neq 0$, so sind die Vektoren a_j *abhängig*. Aus der Definition folgt, daß die Vektoren $a_{1,}a_2, \ldots, a_n$ linear abhängig sind, dann und nur dann, wenn einer von ihnen eine Linearkombination der anderen darstellt. Zur Veranschaulichung: Im $\mathbb{R}^3$ sind 2 Vektoren abhängig, wenn sie auf derselben Ursprungsgeraden liegen, 3 Vektoren sind abhängig, wenn sie in derselben Ursprungsebene liegen (ansonsten wäre es nicht möglich, über eine geeignete Gewichtung der Koeffizienten der Vektoren den Nullvektor zu erzeugen).
Für die Vektorgleichung $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{0}$ bedeutet dies, daß, die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ linear abhängig sind, wenn für nicht alle $x_i = 0$ gilt

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um die lineare Abhängigkeit zu prüfen, schreibt man das obige Gleichungssystem in Staffelform. Man findet:

Satz 6 *Die von Null verschiedenen Zeilen einer Matrix in Staffelform sind linear unabhängig.*

Definition 7 *Ein Vektorraum* A *heißt* n *- dimensional, wenn linear unabhängige Vektoren* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *existieren, die* A *aufspannen. Die Menge* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *heißt Basis von* A.

Beispiel: Die Diagonalmatrix mit den Vektoren

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0) \\ e_2 &= (0,1,0,0) \\ e_3 &= (0,0,1,0) \\ e_4 &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$

bildet eine sog. *Standardbasis* im $\mathbb{R}^4$, d.h. im $\mathbb{R}^4$ ist jeder Vektor über eine Linearkombination der e_1, e_2, e_3, e_4 erzeugbar.

Definition 8 *Sei **A** eine $m \times n$ Matrix. Der $Zeilenraum$ ist der Unterraum von A^n, der durch die Zeilenvektoren von **A** und der $Spaltenraum$ ist der Unterraum, der durch die Spaltenvektoren von **A** erzeugt wird. Die Dimension des Zeilenraumes und des Spaltenraumes werden $Zeilenrang$ und $Spaltenrang$ genannt, wobei gilt: Zeilenrang und Spaltenrang sind gleich.*

Satz 7 *Der Rang einer Matrix ist also die Anzahl der in ihr enthaltenen linear unabhängigen Vektoren (=Dimension des Vektorraumes, die nötig ist, um alle in der Matrix enthaltenen Vektoren darstellen zu können).*

Satz 8 *Der Rang einer Matrix **A** und der Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{A}^t$ sind gleich.*

Eine Matrix und die Matrix, die durch Matrixmultiplikation der Matrix mit seiner Transponierten entsteht, enthalten also dieselbe Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Beachte, daß die Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{A}^t$ *symmetrisch* ist (symmetrisch: Matrix und Transponierte der Matrix sind gleich).

Beispiel: Es sei **A** eine Matrix mit z-Standardwerten. Die Korrelationsmatrix **R** ist:

$$\frac{1}{N}\mathbf{A} \times \mathbf{A^t} = \mathbf{R}$$

und die Korrelationsmatrix **R** enthält genau dieselbe Anzahl linear unabhängiger Vektoren wie die Variablenmatrix **A**:

Zahlenbeispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 22 & 33 & 24 & 66 & 80 \\ 25 & 44 & 46 & 34 & 60 \\ 2 & 13 & 22 & 28 & 33 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} 22 & 25 & 2 \\ 33 & 44 & 13 \\ 24 & 46 & 22 \\ 66 & 34 & 28 \\ 80 & 60 & 33 \end{pmatrix}$$

führt nach z- Standardisierung auf die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0.53 & 0.83 \\ 0.53 & 1 & 0.72 \\ 0.83 & 0.72 & 1 \end{pmatrix}$$

und Row-Reduction angewendet auf **A** und **R** ergibt

$$\mathbf{U_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18.1 & -15.5 \\ 0 & 1 & 0 & 20.9 & 18.7 \\ 0 & 0 & 1 & -9.5 & -8.1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U_R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auch der Begriff des Ranges einer Matrix ist für die Lösung von Gleichungssystemen nützlich: Zu der Vektorgleichung $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ betrachte man die Matrix **A** und die *erweiterte Matrix* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ die durch Anhängen des Spaltenvektors **B** an **A** erzeugt wird:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} .$$

Satz 9 *Die Vektorgleichung* $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ *hat eine Lösung gdw die Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A}$ *und die erweiterte Matrix* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *denselben Rang haben.*

Dies muß gelten, da ja ein Vektor $\mathbf{X}$ von Koeffizienten gesucht wird, so daß $\mathbf{B}$ als eine Linearkombination der Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ geschrieben werden kann. Folglich muß der Vektor $\mathbf{B}$ linear abhängig sein und es darf keine neue Dimension in die Matrix $\mathbf{A}$ durch Anhängen des Vektors $\mathbf{B}$ eingeführt werden.

3.2 Koordinaten

Definition 9 *Sei* $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *eine Basis eines* $n-$ *dimensionalen Raumes* A^n. *Sei* ***B*** *ein beliebiger Vektor. Dann gilt:*

$$\mathbf{B} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \,,$$

wobei $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *Koordinatenvektor von* B *heißt (oder einfach seine Koordinaten in Bezug auf* E.

Der Begriff der Koordinate ist recht allgemein, wie das folgende Beispiel zeigt:
Beispiel: Gegeben sei der Raum A^3 der Polynome der Ordnung ≤ 2:

$$A = \left\{at^2 + bt + c\right\} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \,,$$

dann bilden die Polynome

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 \\ e_2 &= t - 1 \\ e_3 &= (t-1)^2 \end{aligned}$$

eine Basis für A. Es sei $\mathbf{B} = 2t^2 - 5t + 6$, gesucht werde der Koordinatenvektor (x_1, x_2, x_3) für $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} 2t^2 - 5t + 6 &= x_1 + x_2 (t-1) + x_3 (t-1)^2 \\ & \quad x_1 + x_2 t - x_2 + x_3 t^2 - 2x_3 t + x_3 \\ & \quad x_3 t^2 + (x_2 - 2x_3)\, t + (x_1 - x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ x_{2-} 2x_3 &= -5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

und damit $\mathbf{X} = (3, -1, 2)$, also $\mathbf{B} = 3e_1 - e_2 + 2e_3$.

4 Lineare Abbildungen

Definition 10 *Eine Abbildung $F : V \longmapsto U$ heißt* linear *gdw*
1.) für die Vektoren $v, w \in V$ gilt $F(v+w) = F(v) + F(w)$, mit $F(v), F(w) \in U$
2.) ferner gilt $F(k \cdot v) = k \cdot F(v)$, k ein Skalar.

Die Definition impliziert $F(0) = 0$, was man durch setzen von $k = 0$ sofort erhält.
Beispiele:

1. Die Matrixmultiplikation mit einem Vektor $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$, wobei **A** = $m \times n$, **X** =$n \times 1$, **B** =$m \times 1$ ist die lineare Abbildung $A : K^n \longmapsto K^m$, d.h. der Vektor **X** aus K^n wird auf **B** aus K^m abgebildet. Bei der Abbildung wechselt also die Ordnung des Raumes.

2. Die Differentation (der Differentialoperator $D : V \longmapsto V$) ist eine lineare Abbildung: Es wird in der Analysis dür beliebige $v, w \in V$ und $k \in \mathbb{R}$ bewiesen: $\frac{d(v+w)}{dx} = \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$ (Summenregel) und $\frac{d(k \cdot v)}{dx} = k \cdot \frac{dv}{dx}$.

(→an weiteren Beispielen vertiefen)

Definition 11 *Bleibt bei einer linearen Abbildung $T : V \longmapsto V$ der der Vektorraum von Urbild und Bild gleich spricht man von T als einem* linearen Operator *oder einer* linearen Transformation.

Zum Beispiel wäre die Abbildung $T : R^3 \longmapsto R^3$ eine lineare Transformation.
Beispiel: Die Matrixmultiplikation mit einem Vektor $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$, wobei **A** eine n - quadratische Matrix $n \times n$ ist, **X** =$n \times 1$ und folglich $\mathbf{B} = n \times 1$ ist die lineare Transformation $A : K^n \longmapsto K^n$, d.h. der Vektor **X** aus K^n wird auf **B** aus K^n abgebildet. Bei der Abbildung wechselt also die Ordnung des Raumes nicht.

Definition 12 *Eine Abbildung $F : V \longmapsto U$ heißt* singulär*, wenn das Bild eines von Null verschiedenen Vektors Null ist (wenn für $v \in V$ gilt: $F(v) = 0$). $F : V \longmapsto U$ heißt* nichtsingulär*, wenn F* nur *$0 \in V$ in $0 \in U$ abbildet.*

Aus der Definition folgt, daß alle injektiven linearen Abbildungen nicht - singulär sind. Ebenfalls gilt die Umkehrung: Nicht - singuläre lineare Abbildungen sind injektiv: Sei F nichtsingulär und linear und es gelte $F(v) = F(w)$, so folgt $F(v-w) = F(v) - F(w) = 0$, also $v - w = 0 \Rightarrow v = w$, somit ist F injektiv.

Es folgt ein wichtiger Satz der linearen Algebra:

Satz 10 *Ein linearer Operator $T : V \longmapsto V$ ist invertierbar (besitzt eine Inverse) dann und nur dann, wenn er nicht - singulär ist.*

Es kann nun einwichtiger Schluß für die Algebra *n* - quadratischer Matrizen gezogen werden: Es gelte $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ und **A** sei *n* - quadratisch, so daß A als linearer Operator aufgefaßt werden kann. Angenomen, A ist nicht - singulär (besitzt eine Inverse), dann hat das homogene Gleichungssystem $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = 0$ nur die triviale Lösung. Da A in diesem Fall

injektiv ist, hat das System eine eindeutige Lösung für beliebige $b \in K^n$.
Angenommen, A sei singulär, dann hat das homogene System eine von Null verschiedene Lösung. Dann ist A nicht injektiv, d.h. das inhomogene System hat keine eindeutige Lösung, wenn überhaupt eine existiert. Wir fassen zusammen in einem wichtigen Satz:

Satz 11 *i) Wenn das homogene System $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = 0$ nur die Null - Lösung besitzt, so hat das inhomogene System $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ eine eindeutige Lösung für beliebige Werte b_i.*
ii) Wenn das homogene System $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = 0$ eine von Null verschiedene Lösung hat, dann gilt 1) Es gibt Werte der b_i, für die das inhomogene System $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ keine Lösung hat; 2) Wenn eine Lösung des inhomogenen Systems existiert, ist sie nicht eindeutig.

4.1 Matrixdarstellung linearer Operatoren

Sei $E = \{e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n\}$ eine Basis des Vektorraumes V und sei T ein linearer Operator. Wendet man T auf irgend einen Basisvektor e_i an, erhält man einen Vektor $T(e_i)$, der sich als eine Linearkombination aller Basisvektoren darstellen läßt. Es ergibt sich also

$$\begin{array}{ccc} T(e_1) & = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ T(e_2) & = & a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T(e_2) & = & a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{array}.$$

Definition 13 *Die Transponierte der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ heißt Matrixdarstellung von des linearen Operators T bezüglich der Basis E, bezeichnet mit*

$$[T_e] \, . \, [T_e] = \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Der lineare Operator T auf R^2 sei definiert durch die Regel $T(x,y) = (4x - 2y, 2x + y)$. Man berechne die Matrixdarstellung von T für die Basisvektoren $\{e_1 = (1,1), e_2 = (-1,0)\}$.
$T(e_1) = T(1,1) = (2,3) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \Rightarrow a_{11} = 3, a_{12} = 1$,$T(e_2) = T(-1,0) = (-4,-2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \Rightarrow a_{21} = -2$, $a_{22} = 2$

$$[T_e] = \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 12 *Sei $E = \{e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und T ein beliebiger linearer Operator auf V. Dann gilt: $[T_e] \times [v_e] = [T(v)_e]$.*

D.h. Man erhält den Koordinatenvektor von $T(v)$, wenn man den Koordinatenvektor von v mit der Matrixdarstellung von T multipliziert. Dies ist unmittelbar einsichtig und wird anhand des obigen Beispiels veranschaulicht:
Sei $v = (5, 7)$, dann ist $T(v) = (6, 17)$. Die Koordinatendarstellungen von v bezüglich der obigen Basis $\{e_1 = (1, 1), e_2 = (-1, 0)\}$ lauten

$$[v_e] = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, [T(v)_e] = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$[T_e] \times [v_e] = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix} = [T(v)_e].$$

Da die Wahl der Basis willkürlich ist (die Basisvektoren müssen lediglich linear unabhängig sein) stellt sich die Frage, wie sich die Matrixdarstellung eines linearen Operators ändert, wenn man zu einer anderen Basis übergeht. Da die neuen Basisvektoren $\{e'_i\}$ als eine Linearkombination der alten Basisvektoren $\{e_i\}$ dargestellt werden können, existiert eine *Übergangsmatrix* $\mathbf{P}$ von der alten Basis zu der neuen als die Transponierte der Matrix der Koeffizienten der benötigten Linearkombination:

$$\begin{array}{ccc} e'_1 & = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ e'_2 & = & a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e'_n & = & a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{array}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{P}$ hat eine Inverse $\mathbf{P}^{-1}$. Die Inverse $\mathbf{P}^{-1}$ ist die Übergangsmatrix für die Rücktransformation der neuen Basisvektoren e'_i zurück in die alten e_i. Wie sich die Koordinatenvektoren bei einem Wechsel der Basis ändern, sagt folgender Satz:

Satz 13 *Es sei **P** die Übergangsmatrix für den Übergang von $\{e_i\}$ zu $\{e'_i\}$ in einem Vektorraum V. Dann gilt: $\mathbf{P}\times [v_{e'}] = [v_e]$ für alle $v \in V$. Es folgt $[v_{e'}] = \mathbf{P}^{-1} \times [v_e]$.*

Man muß also die alten Koordinaten mit der Inversen der Übergangsmatrix multiplizieren, um die neuen Koordinaten zu erhalten.
Beispiel: Es gelte obige Transformation in R^3 (d.h. $n = 3$) für den Übergang von von $\{e_i\}$ zu $\{e'_i\}$ und es gelte für einen Vektor $v \in V, v = k_1e'_1 + k_2e'_2 + k_3e'_3,$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v &= k_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) + k_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) + k_3(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) \\ &= (a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + a_{31}k_3)e_1 + (a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + a_{32}k_3)e_2 + (a_{13}k_1 + a_{23}k_2 + a_{33}k_3)e_3 \end{aligned}$$

also

$$[v_{e'}] = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, [v_e] = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + a_{31}k_3 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + a_{32}k_3 \\ a_{13}k_1 + a_{23}k_2 + a_{33}k_3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\mathbf{P}\times [v_{e'}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + a_{31}k_3 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + a_{32}k_3 \\ a_{13}k_1 + a_{23}k_2 + a_{33}k_3 \end{pmatrix} = [v_e]$$

Wir kommen nun zu der Auswirkung des Basiswechsels auf die Matrixdarstellung eines linearen Operators:

Satz 14 *Es sei **P** die Übergangsmatrix für den Übergang von $\{e_i\}$ zu $\{e'_i\}$ in einem Vektorraum V. Dann gilt:* $(T_{e'}) = \mathbf{P}^{-1}\times [T_e] \times \mathbf{P}$.

4.2 Ähnlichkeit von Matrizen

Der letzte Satz des vorherigen Abschnitts wird jetzt zur Definition des Begriffes der Ähnlichkeit verwendet.

Satz 15 *Seien **A, B** quadratische Matizen. Existiert eine Matrix **P** derart, daß*

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \times \mathbf{A} \times \mathbf{P}$$

*gilt, so heißen **A** und **B** ähnlich und können auseinander durch eine Ähnlichkeitstransformation erzeugt werden.*

Satz 16 *Zwei Matrizen **A** und **B** stellen denselben linearen Operator dar, wenn sie ähnlich sind.*

Dieser Satz besagt, daß alle Matrixdarstellungen eines linearen Operators T eine ähnliche Klasse von äquivalenten Matrizen bilden (jede einzelne bezieht sich lediglich auf eine andere Basis, jede Basis ist aber in eine andere mittels der entsprechenden Übergangsmatrix überführbar).

Satz 17 *Ein linearer Operator heißt diagonalisierbar, wenn er für eine beliebige Basis durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden kann.*

Satz 18 *Sei* $\mathbf{A}$ *eine Matrixdarstellung eines linearen Operators T. Dann ist T diagonalisierbar dann und nur dann, wenn eine invertierbare Matrix **P** existiert, so daß* $\mathbf{P}^{-1} \times \mathbf{A} \times \mathbf{P}$ *eine Diagonalmatrix ist.*

Satz 19 *Zwei ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur (Spur: Summe der Diagonalelemente).*

5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir stellen eine kurze Betrachtung von Matrizen in Polynomen voran. Es sei $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ ein Polynom $n-$ ten Grades. Es sei $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix. Dann wird definiert:

$$f(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}$$

wobei $\mathbf{I}$ die Identitätsmatrix ist. Gilt $f(\mathbf{A}) = 0$, so ist $\mathbf{A}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(t)$.
Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rl} f(t) = & 2t^2 - 3t + 7 \\ g(t) = & t^2 - 5t - 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 21 & 39 \end{pmatrix} \\ g(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher ist $\mathbf{A}$ eine Nullstellt von $g(t)$.

Man kann diese Definition ebenfalls auf lineare Operatoren anwenden:

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 I$$

wobei *I* die identische Abbildung ist, denn es gilt $f(\mathbf{A})$ ist die Matrixdarstellung von $f(T)$, wenn $\mathbf{A}$ die Matrixdarstellung von T ist.

Wir wenden uns nun Eigenwerten und Eigenvektoren zu:

Definition 14 *Ein Skalar λ heißt **Eigenwert** eines linearen Operators T, $T : V \longmapsto V$, wenn ein von Null verschiedener Vektor $v \in V$ existiert, für den gilt*

$$T(v) = \lambda v.$$

*Der Vektor v wird **Eigenvektor** von T genannt, zu dem der Eigenwert λ gehört.*

Ferner gilt, daß jedes skalare Vielfache kv ebenfalls ein Eigenvektor von T ist: $T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$. Die Menge aller Eigenvektoren bildet einen Unterraum von V, den *Eigenraum.*
Beispiel: Gib Eigenwerte und Eigenvektoren zu der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ an!}$$

Es muß gelten: $\mathbf{A}\times v = \lambda v$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Dann hat man das System

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 &= \lambda v_1 \\ 3v_1 + 2v_2 &= \lambda v_2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)\, v_1 - 2v_2 &= 0 \\ -3v_1 + (\lambda - 2)\, v_2 &= 0 \end{aligned} . \qquad (*)$$

Die neue Koeffizientenmatrix lautet

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

Das homogene System hat einen von Null verschiedenen Lösungsvektor v, wenn die Determinante $|\mathbf{A}^*| = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} &= (\lambda - 1)\,(\lambda - 2) - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \\ &= (\lambda - 4)\,(\lambda + 1)\,. \end{aligned}$$

Das Determinantenpolynom $f\,(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ hat also Nullstellen bei $\lambda = 4$ und $\lambda = -1$. Dies sind die Eigenwerte von **A.** Einsetzen in $(*)$ gibt

$$\begin{aligned} 3v_1 - 2v_2 &= 0 \\ -3v_1 + 2v_2 &= 0 \end{aligned}$$

und damit die Bedingung $3v_1 = 2v_2$, damit ist $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und jedes skalare Vielfache $k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ der zu $\lambda = 4$ gehörige Eigenvektor (für $\lambda = -1$ findet man $v = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als zugehörigem Eigenvektor).

Das gerade behandelte Beispiel leitet über zu dem allgemeinen Satz:

Satz 20 *Sei $T : V \longmapsto V$ ein linearer Operator. Dann ist λ ein Eigenwert von T genau dann, wenn der Operator $\lambda I - T$ singulär ist.*

Beweis: λ ist ein Eigenwert von T gdw es einen Vektor $v \neq 0$ gibt so daß

$$\begin{aligned} T\,(v) &= \lambda v \text{ oder} \\ (\lambda I)\, v - T\,(v) &= 0 \text{ oder} \\ (\lambda I - T)\, v &= 0 \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Wir schreiben schreiben diesen Satz wegen seiner zentralen Bedeutung für die Faktorenanalyse noch einmal ausführlich in der Matrixdarstellung des linearen Operators T. Sei $\mathbf{A}$ die Matrixdarstellung des linearen Operators T, dann lautet die Formulierung des Eigenwertproblems

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\times v &= \lambda v \\ \Longleftrightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{v}-\lambda v &= 0 \\ \Longleftrightarrow (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\times v &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt, daß die Matrix $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ singulär sein muß, da sie einen Vektor $v \neq 0$ in den Nullvektor abbildet. Ausführlich geschrieben erhalten wir daraus die Bedingung

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right| = 0,$$

eingesetzt dann

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0.$$

5.1 Charakteristische Matrix und charakteristisches Polynom

Es sei $\mathbf{A}$ eine n - quadratische Matrix. Dann ist die Matrix $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ gegeben durch

$$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix wird *charakteristische Matrix* genannt. Wir suchen $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$. Die Entwicklung der Determinante führt auf ein Polynom in λ (s. Beispiel oben) und wird *charakteristisches Polynom von* $\mathbf{A}$ genannt. Man nennt

$$f_A(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$$

die charakteristische Gleichung von **A.** Aus jeder Zeile und Spalte kommt nur ein Element in jedem Summanden der Determinante vor, der erste Summand ist das Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\ldots(\lambda-a_{nn}) + \text{Ausdrücke niedrigerer Ordnung}$$

anders geschrieben

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n - \underbrace{(a_{11} + \ldots + a_{nn})}_{\text{Spur von } \mathbf{A}} \lambda^{n-1} + \text{Ausdrücke niedrigerer Ordnung von } \lambda.$$

Daher kann man allgemein über charakteristische Polynome sagen, daß sie n - ten Grades sind, ihr führender Koeffizient stets 1 und der Koeffizient der nächst niedrigeren Ordnung der negative Wert der Spur der Matrix **A** ist. Die Nullstellen (Wurzeln) des Polynoms sind dann mit Methoden der Algebra zu bestimmen ($\rightarrow$ Fundamentalsatz der Algebra: Darstellbarkeit jeden Polynoms n - ter Ordnung in der Faktorschreibweise). Folgender Satz zeigt die Beziehung zu Eigenwerten von **A:**

Satz 21 *Ein Skalar λ ist ein Eigenwert der n -quadratischen Matrix **A** dann und nur dann, wenn λ eine Wurzel des charakteristischen Polynoms $f_A(\lambda)$ ist.*

Es folgt ein fundamentaler Satz der linearen Algebra (*Satz von Cayley - Hamilton*):

Satz 22 *Jede Matrix ist eine Wurzel ihres charakteristischen Polynoms.*

Ein weiterer wichtiger Satz ist

Satz 23 *Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.*

Daraus ergibt sich, daß ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte haben.