Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit definieren Beziehungen, die innerhalb einer Menge von Vektoren bestehen. Dazu betrachte man eine

Linearkombination

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + \ldots + \alpha_n \vec{a_n}$$

Beispiel:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Für die Linearkombination

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

finde die gesuchten Koeffizienten!

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} -2\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -5 \\ \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & = & 4 \\ 3\alpha_1 & + & 5\alpha_2 & = & 1 \end{array}$$

Welches eine eindeutige Lösung besitzt, nämlich

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -1$$

wie man durch Einsetzen verfiziert.

Wir ersetzen in (1) den Vektor $\vec{b}$ durch einen $\vec{a}$ Vektor und schreiben

$$\vec{a_n} = \alpha_1^{'}\vec{a_1} + \alpha_2^{'}\vec{a_2} + \ldots + \alpha_{n-1}^{'}\vec{a}_{n-1}$$

Denn man kann die Koeffizienten auffassen als

$$\alpha_i^{'} = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \quad \alpha_n^{'} = -\frac{\alpha_n}{\alpha_n} = -1$$

Dann kann man auch allgemeinhin schreiben

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$$

D.H.: Einen Vektor durch eine Linearkombination der anderen ausdrücken und durch eine Linearkombination aller Vektoren den Nullvektor erzeugen ist gleichwertig.

Man betrachte nun

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$$

Diese Gleichung kann nicht nach $\vec{a}_2$ aufgelöst werden, man kann also in diesem Fall $\vec{a}_2$ nicht als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben.

⇒ Es muß mindestens ein Koeffizient ungleich Null sein, damit man eine „nichttriviale“ Linearkombination für den Nullvektor erhält.

Definition: *Lineare Abhängigkeit*

Gibt es Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die nicht alle 0 sind und für die gilt

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$$

so heißen die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *linear abhängig*, sonst *linear unabhängig*.

Entsprechend wird definiert:

Definition: *Lineare Unabhängigkeit*

Ist die Gleichung

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ erfüllt, so heißen die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *linear unabhängig*.

Sätze

1. Ist der Nullvektor unter den $\vec{a}_i$ so sind die $\vec{a}_i$ stets abhängig
2. Vektoren sind linear abhängig, wenn es unter ihnen mindestens einen gibt, der sich durch Linearkombination aus den anderen erzeugen läßt
3. Läßt man bei *n*- linear unabhängigen Vektoren einen weg, so sind die restlichen immer noch linear unabhängig (die Koeffizienten sind ja *alle* gleich 0)
4. Fügt man *n*- linear abhängigen Vektoren einen hinzu, so sind die n+1 Vektoren ebenfalls linear abhängig

Beispiel

Untersuche ob die 3 Vektoren

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linear unabhängig sind!
Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 &+ \alpha_2 &+ 2\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 &+ 2\alpha_2 & &= 0 \\ 3\alpha_1 & & &= 0 \end{aligned}$$

folglich sind alle Koeffizienten Null, die Vektoren also linear unabhängig

Beispiel

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Man sieht sofort: $\vec{a}_3 = -2\vec{a}_2$, woraus man folgern kann:

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ linear abhängig !

In dem Beispiel sieht man für den Lösungsvektor $\vec{\alpha}$
:

$$\vec{\alpha} = (0,2,1) \text{ wäre eine Lösung, aber auch}$$

$$c \cdot \vec{\alpha} = (0,2c,c) \text{ wäre ein möglicher Koeffizientenvektor}$$

$\Rightarrow$ Die Lösung ist eindeutig bis auf eine Proportionalitätskonstante

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sind die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ linear unabhängig ?

$$\begin{array}{rcrcr} -2\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & + & 5\alpha_2 & = & 0 \end{array} \Bigg| \cdot 2$$

$$\Rightarrow -3\alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \;\; \alpha_2 = 0$$

Also linear unabhängig. Für die Darstellung von $\vec{b}$ durch $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ finden wir

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr} -2\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -5 \\ \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & = & 4 \\ 3\alpha_3 & + & 5\alpha_2 & = & 1 \end{array}$$

Was wir mit der Umformung $L_2^{'} = 2L_2 + L_1$ also $L_2^{'} := -3a_2 = 3$ und damit

$$\alpha_1 = 2$$
$$\alpha_2 = -1$$

Kann es noch eine andere Lösung geben, als eine zu dieser Lösung proportionale?

Zur Eindeutigkeit dieser Lösung folgende Überlegung:

Angenommen es gäbe 2 Lösungen, könnten wir schreiben

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$$
$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2$$

Also

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{a}_2$$

Da die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ linear unabhängig sind, müssen die Klammern gleich Null sein, folglich gilt

$$\alpha_1 = \beta_1$$
$$\alpha_2 = \beta_2$$

Die Lösungen sind gleich. Es gibt also nicht mehrere Darstellungen von $\overrightarrow{b}$ durch die linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$. Dies gilt allgemein:

Ist der Vektor $\overrightarrow{b}$ durch eine Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ erzeugbar, so ist er auch *nur auf eine bestimmte eindeutige Weise* aus diesen Vektoren herzustellen

Sind die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ linear abhängig, so gibt es mehrere Weisen zur Darstellung von $\overrightarrow{b}$. Es existieren so viele Lösungen, wie linear unabhängige Untermengen aus den Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ gebildet werden können, aus denen $\overrightarrow{b}$ dargestellt werden kann.

Beispiel

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &1) \quad \vec{b} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 \\ &2) \quad \vec{b} = -8\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 \\ &3) \quad \vec{b} = -\frac{5}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 \end{aligned}$$

Für die existierenden Lösungen. Wir untersuchen den Zusammenhang dieser Lösungen. Dazu betrachten wir zunächst den Zusammenhang der Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ untereinander und versuchen den Vektor $\overrightarrow{a_3}$ durch die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ darzustellen:

$$\vec{a}_3 = r_1\vec{a}_1 + r_2 2\vec{a}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr|l} -r_1 & + & 3r_2 & = & 1 & \cdot 2 \\ 2r_1 & - & 2r_2 & = & 3 & \end{array}$$

Also

$$\begin{array}{rcrcr} -2r_1 & + & 6r_2 & = & 2 \\ & & 4r_2 & = & 5 \end{array}$$

Die Lösung ist dann

$$r_2 = \frac{5}{4}$$

$$2r_1 - \frac{10}{4} = 3,$$

$$r_1 = \frac{3 + 2\,{}^1\!/_2}{2} = \frac{11}{4} = 2\,{}^3\!/_4$$

Also sind die 3 Vektoren linear abhängig.

$$\vec{a}_3 = \frac{11}{4}\vec{a}_1 + \frac{5}{4}\vec{a}_2$$

In den Lösungen 1) und 2) kann man nun $\overrightarrow{a_3}$ ersetzen. Da

$$1)\quad \vec{b} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 2\left(\frac{11}{4}\vec{a}_1 + \frac{5}{4}\vec{a}_2\right)$$
$$= \left(3 - \frac{11}{2}\right)\vec{a}_1 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)\vec{a}_2 = -\frac{5}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2$$

werden die Lösungen 1) und 2)

$$2)\quad \vec{b} = -8\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = -8\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 2\left(\frac{11}{4}\vec{a}_1 + \frac{5}{4}\vec{a}_2\right)$$
$$= \left(-8 + \frac{11}{2}\right)\vec{a}_1 + \left(-3 + \frac{5}{2}\right)\vec{a}_2 = -\frac{5}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2$$

Das ist aber jeweils gerade die Lösung 3). Man kann also Lösung 3 aus den anderen beiden Lösungen herleiten. Eine weitere Prüfung ergibt, daß die Paare von Vektoren $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3}), (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$ Paare linear unabhängiger Vektoren sind, aus denen man jeweils durch Linearkombination den Vektor $\overrightarrow{b}$ erzeugen kann. (Man prüfe das exemplarisch für $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3})$) Da es 3 Untermengen linear unabhängiger Vektoren gibt, gibt es auch 3 Lösungen.

Lineare Unabhängigkeit und Dimension

Wir nehmen 2 ebene Vektoren an, die linear abhängig sind. Was ist die geometrische Bedeutung?
Beispiel:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Führt auf

$$\vec{a}_1 - \frac{3}{2}\vec{a}_2 = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{a}_1 = \frac{3}{2}\vec{a}_2$$

Dies heißt aber, daß die beiden ebenen Vektoren auf einem Strahl liegen. Dasselbe Ergebnis hätten wir erhalten bei Betrachtung von 2 linear abhängigen räumlichen Vektoren.

Allgemein gilt:

Zwei Vektoren (beliebiger Dimension) sind linear abhängig gdw sie parallel (kollinear) sind

Wir betrachten nun 3 linear abhängige Vektoren. Dann gilt

$$\vec{a}_3 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2$$

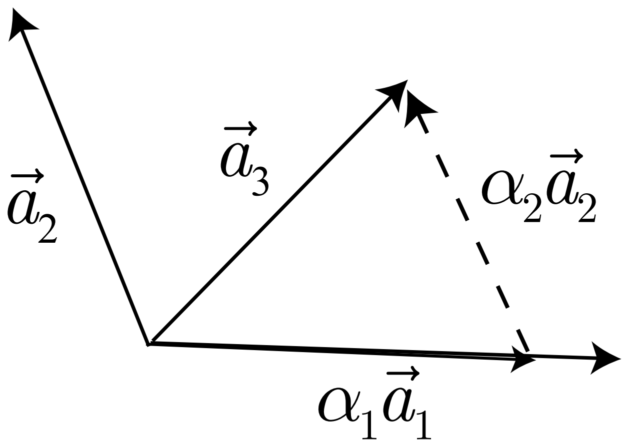
Und wenigstens ein Koeffizient ist von Null verschieden.

Wir können 2 Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ sind kollinear. Dann muß auch $\overrightarrow{a_3}$ zu beiden kollienar sein.

Fall 2: $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ sind linear unabhängig. Dann sind wiederum 2 Fälle zu unterscheiden:

1) Die beiden Koeffizienten α_1, α_2 sind von Null verschieden.



Dann kann man
eine Linearkombination finden, wenn $\overrightarrow{a_3}$ mit den Vektoren
Fall 1: $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ in einer Ebene liegt. Würde $\overrightarrow{a_3}$ in einer anderen Hyperebene liegen, wäre keine Linearkombination möglich.

2) Es gilt $a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$. Dann gilt für die lineare Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} \vec{a}_3 &= \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 \\ &= \alpha_1\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{a}_2 \\ \Rightarrow \vec{a}_3 &= \alpha_1\vec{a}_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{a}_3 &= \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 \\ &= 0\cdot\vec{a}_1 + \alpha_2\cdot\vec{a}_2 \\ \Rightarrow \vec{a}_3 &= \alpha_2\vec{a}_2 \end{aligned}$$

Es folgt also, daß $\overrightarrow{a_3}$ zu einem der Vektoren kollinear sein muß.

Aus den Fällen ergibt sich die Folgerung:

Drei Vektoren (beliebiger Dimension) sind linear abhängig gdw sie komplanar sind (in einer Ebene liegen)

Aus $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^2$ (ebene Vektoren) kann man höchstens 2 linear unabhängige Vektoren herasgreifen. 3 Vektoren werden in $\mathbb{R}^2$ immer linear abhängig sein. Aus diesen 2 (beliebigen) linear unabhängigen Vektoren kann man dann jeden beliebigen dritten Vektor $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^2$ erzeugen. Die beiden linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ spannen eine Ebene auf, sie sind eine ***Basis*** *der Ebene.*

Der einfachste Fall linear unabhängiger Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind die orthogonalen Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeder ebene Vektor ist durch eine Linearkombination dieser beiden Vektoren erzeugbar.

Allgemein

1. Hat man mehr Vektoren als die Dimension der Vektoren (Anzahl der Koordinatenzahlen), so sind die Vektoren immer linear abhängig
2. Es sind immer *n* - Vektoren linear abhängig, wenn sie in einer *n*-1 dimensionalen Hyperebe liegen

Orthogonalität

Eine besondere Form der linearen Unabhängigkeit ist die Orthogonalität. Sie bedeutet, daß Vektoren *paarweise aufeinander senkrecht* stehen. Diese Vektoren haben daher keine Raumrichtung gemeinsam.

Definition

Zwei Vektoren heißen orthogonal, wenn ihr inneres Produkt gleich Null ist.

$$\left\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot a_{2i} = 0$$

Beispiel:

Die Vektoren

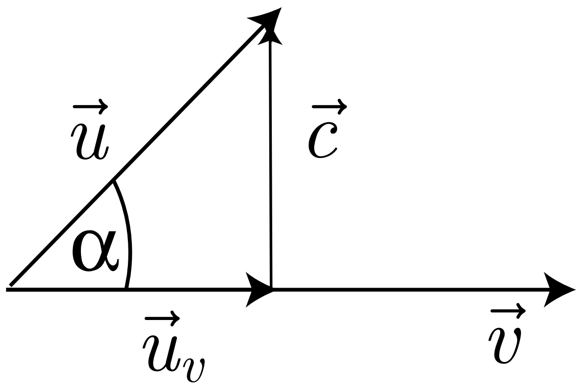
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig, aber nicht alle sind orthogonal zueinander. (Prüfe)

Orthogonalisierung

Hat man eine Basis eines Vektorraumes, kann man aus dieser Basis eine Orthogonalbasis erzeugen. Das heißt, man kann die Menge linear unabhängiger Vektoren (Basisvektoren) als Grundlage benutzen, eine entsprechende Menge orthogonaler Menge von Basivektoren zu schaffen.

Wir betrachten 2 Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$, die linear unabhängig sind. Zu $\overrightarrow{v}$ konstruieren wir einen Vektor $\overrightarrow{c}$, der senkrecht auf ihm steht.



Es gilt ja für die Länge der Projektion

$$\left|\vec{u}_v\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot \cos\alpha$$

Und für das innere Produkt:

$$\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle = \left|\vec{v}\right|\left|\vec{u}\right| \cdot \cos\alpha$$

Damit ergibt sich für die Länge des Projektionsvektors $\overrightarrow{u}_v$

$$\left|\vec{u}_v\right| = \frac{\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle}{\left|\vec{v}\right|}$$

Wir suchen nun den Skalar, mit dem man $\overrightarrow{v}$ multiplizieren muß, um $\overrightarrow{u}_v$ zu erhalten. Dazu normiert man erst $\overrightarrow{v}$ an seiner Eigenlänge zu 1 und multipliziert dann mit der Länge von $\overrightarrow{u}_v$

$$\vec{u}_v = \left|\vec{u}_v\right| \cdot \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle}{\left|\vec{v}\right|} \cdot \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle}{\left|\vec{v}\right|^2} \cdot \vec{v}$$

Damit haben wir für den Vektor $\overrightarrow{c}$

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{u} - \vec{u}_v \\ &= \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

Der Vektor $\overrightarrow{c}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{v}$.

Das Problem läßt sich allgemein formulieren:

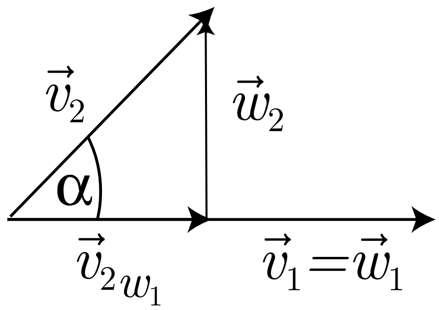
Gegeben sei eine Basis $B = \left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\right\}$. Gesucht sei eine zu B korrespondierende Orthogonalbasis $C = \left\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots, \overrightarrow{w_n}\right\}$, d.h. $\left\langle \overrightarrow{w_i}, \overrightarrow{w_j} \right\rangle = 0, i \neq j \leq n$.

Dazu verwende man folgendes iteratives Vorgehen:

1. Setze $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1}$

2. Suche den Vektor $\overrightarrow{w_2}$, der auf $\overrightarrow{w_1}$ senkrecht steht.

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \vec{v}_{2_{w1}} \\ &= \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{|\vec{w}_1|^2} \cdot \vec{w}_1\end{aligned}$$



3. Suche den Vektor $\overrightarrow{w_3}$, der auf $\overrightarrow{w_1}$ und auf $\overrightarrow{w_2}$ senkrecht steht.

$$\begin{aligned}\vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \left(\vec{v}_{3_{w2}} + \vec{v}_{3_{w1}}\right) \\ &= \vec{v}_3 - \left(\frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle}{|\vec{w}_2|^2} \cdot \vec{w}_2 + \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle}{|\vec{w}_1|^2} \cdot \vec{w}_1\right)\end{aligned}$$